V. <u>FUNKCJA KWADRATOWA</u>

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in R$.

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q, \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a},\ q = -\frac{\Delta}{4a},\ \Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych $(p,\ q)$.

Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$, do dołu, gdy $a < 0$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$), zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$
- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta \geq 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wzory Viéte'a:

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ $\qquad$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

ZADANIA:

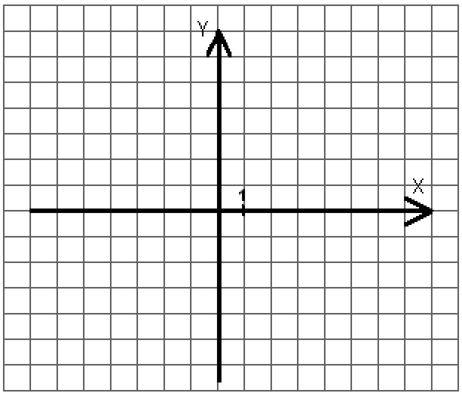
1. Narysuj wykres funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 5$ i omów jej własności.

   a) Znajdź miejsca zerowe funkcji $f(x)$.

   b) Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli.

   c) Znajdź punkt przecięcia się funkcji z osią Y.

d) Sporządź wykres i podaj własności funkcji.



wzór funkcji $f(x)$ w postaci

ogólnej:

kanonicznej:

iloczynowej:

2. Przejdź z postaci kanonicznej na postać ogólną funkcji kwadratowej:

$y = 3(x+1)^2 + 2$

3. Przejdź z postaci iloczynowej na postać ogólną funkcji kwadratowej:

$y = 2(x-1)(x+3)$

4. Dana jest funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej. Sprowadź ją do postaci iloczynowej.

$y = 2(x+1)^2 - 8$

5. Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej. Podaj postać kanoniczną tej funkcji.

$y = -(x-6)(x+4)$

6. Na podstawie wzoru funkcji w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ podaj odpowiednie własności funkcji $f(x)$:

	wzór funkcji $f(x)$	**ramiona paraboli i współrzędne wierzchołka** $(p,\ q)$	**równanie osi symetrii paraboli**	**maksymalny przedział dla funkcji rosnącej**	**maksymalny przedział dla funkcji malejącej**	**ekstremum funkcji**	**zbiór wartości funkcji**
a)	$(x-3)^2 + 1$						
b)	$-(x+4)^2 - 3$						

7. Na podstawie wzoru funkcji w postaci iloczynowej $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ podaj odpowiednie własności funkcji $f(x)$:

	wzór funkcji $f(x)$	**ramiona paraboli i miejsca zerowe**	**argumenty dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie** $f(x) > 0$	**argumenty dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne** $f(x) < 0$
a)	$(x-2)(x+4)$			
b)	$-(x+1)(x+3)$			

8. Dana jest funkcja $f(x) = (x-2)^2 + 3$ oraz $g(x) = m$. Określ, ile rozwiązań ma równanie $f(x) = g(x)$ w zależności od parametru m.

9. Znajdź miejsca zerowe funkcji f jeśli:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

b) $f(x) = x^2 + 9$

10. Funkcja kwadratowa f osiąga najmniejszą wartość równą -5 dla argumentu 3. Znajdź wzór tej funkcji wiedząc, że należy do niej punkt o współrzędnych $(1,\ 3)$.

11. Funkcja kwadratowa f, której miejscami zerowymi są liczby -1 i 2, dla argumentu 1 przyjmuje wartość 6. Znajdź wzór funkcji f.

12. Dany jest wzór funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + c$ oraz punkt $W = (3,\ 4)$ będący wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji $f(x)$. Znajdź współczynniki b i c.

13. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w zadanym przedziale:

a) $y=-x^2-3x+10$ dla $x\in\langle 0, 2\rangle$ b) $y=2x^2-8x+1$ dla $x\in\langle 0, 3\rangle$.

14. Wyznacz wymiary prostokąta o obwodzie 36, którego pole jest największe.

15. Liczbę 30 rozłóż na takie dwa składniki, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

16. Właściciel sklepu kupuje aparaty płacąc producentowi 120 zł za sztukę i sprzedaje 40 sztuk aparatów miesięcznie po 180 zł. Właściciel oszacował, że każda obniżka ceny aparatu o 1 zł zwiększa liczbę sprzedanych aparatów o 1 sztukę. Jaką powinien ustalić cenę, aby jego zysk był największy.

17. Rozwiąż równanie:

a) $x^2 - 16 = 0$ b) $x^2 + 2 = 0$ c) $4x^2 + 8x = 0$

d) $x^2 - 10x + 25 = 0$ e) $x^2 - 4x - 12 = 0$ f) $5x^2 + 3x + 1 = 0$

18. W klasie IIIa liczba dziewcząt jest o 4 większa od liczby chłopców. Z okazji Walentynek każdy chłopiec kupił kwiatek każdej koleżance z klasy. W sumie chłopcy kupili 221 kwiatków. Ilu uczniów liczy klasa IIIa?

19. Wiedząc, że x_1 i x_2 są miejscami zerowymi trójmianu kwadratowego $f(x) = x^2 + 4x + 2$, oblicz wyrażenie:

a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 \cdot x_2$

Na podstawie otrzymanych wyników określ znak x_1 i x_2.

20. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-4)(x+5)>0$

b) $-3x(x-6)<0$

c) $x^2>4$

d) $x^2<8x$

e) $-3x^2+7x-2\leq 0$

f) $x^2+5x+8>0$

g) $2x^2-x+7\leq 0$

h) $x^2-2x+1>0$

i) $-x^2+14x-49>0$

j) $4+4x+x^2\leq 0$

k) $-9x^2+6x-1\leq 0$